Karnaugh - De Morgan

TD 3 *Tableau de Karnaugh à 2 variables*

I TABLEAU DE KARNAUGH

_Reprenons une expression vue au chapitre précédent

on avait $Q = a\,b + \bar{a}\,b + a\,\bar{b}$

Cette expression se simplifiait en Q = a + b mais la démonstration n'était pas évidente.

_ La méthode par tableau de Karnaugh va nous permettre d'utliser une méthode systématique.

Le tableau de Karnaugh n'est qu'une table de vérité mais présentée d'une autre manière :

- il y a autant de cases dans un tableau de karnaugh qu'il y a de combinaisons soit 2^n cases (n étant le nombre de variables).

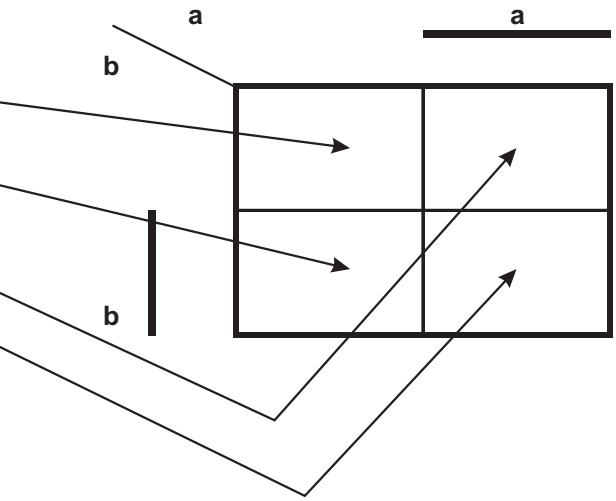
- en passant d'une case contigüe à une autre, c'est-à-dire en changeant de ligne ou de colonne, on ne change qu'une variable à la fois.

1) TABLEAU DE KARNAUGH A 2 VARIABLES

Table de vérité

a	b
0	0
0	1
1	0
1	1

Tableau de Karnaugh



A chaque ligne d'une table de vérité correspond une case du tableau de Karnaugh.

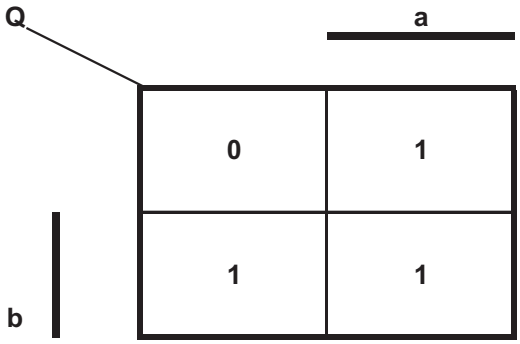
Le trait en face d'une ligne ou d'une colonne signifie que la variable vaut 1 dans cette ligne ou dans cette colonne.

Tableau de Karnaugh à 2 variables

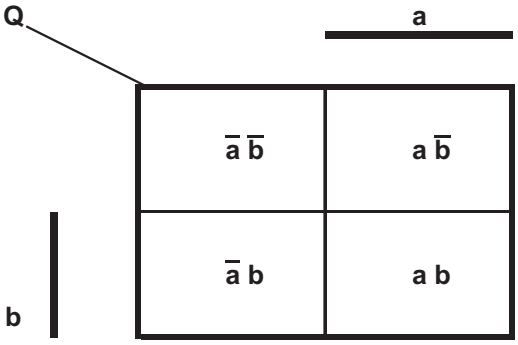
_Reprenons notre expression $Q = a\,b + \overline{a}\,b + a\,\overline{b}$

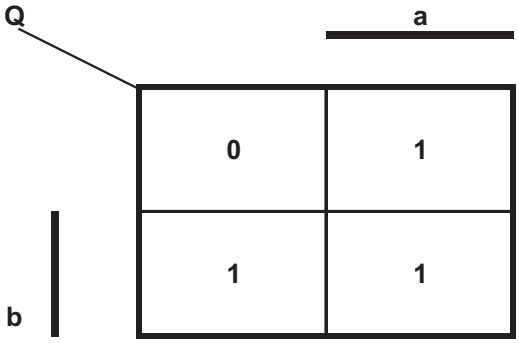
_ on peut en établir la table de vérité et reporter celle-ci dans le tableau de Karnaugh (en s'aidant de la page précédente).

a	b	L	
0	0	0	
0	1	1	→ $\overline{a}\,b$
1	0	1	→ $a\,\overline{b}$
1	1	1	→ $a\,b$



_ on peut aussi remplir directement le tableau de Karnaugh à partir de l'équation, chaque case du tableau représentant une combinaison " a b ".

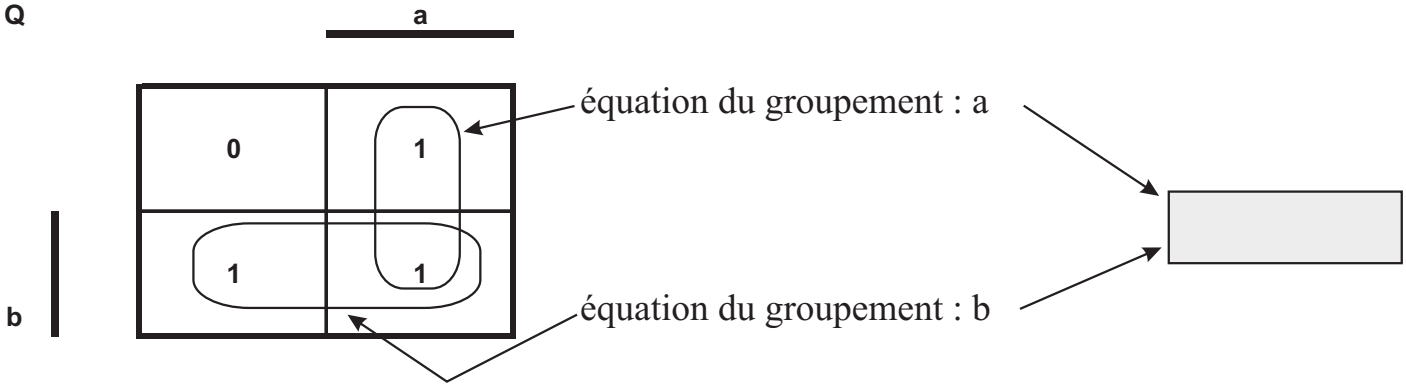




_ l'équation la plus simple sera obtenue en faisant la somme des équations des groupements de 1 tout en observant les règles suivantes :

* un groupement est constitué de"1" rassemblés par puissance de 2 et occupant des cases contigües
* chaque "1" doit être pris dans un groupement au moins
* les groupements peuvent se recouper
* l'équation du groupement est obtenue en éliminant les variables qui changent d'état pour ne garder que celles qui ne changent pas.

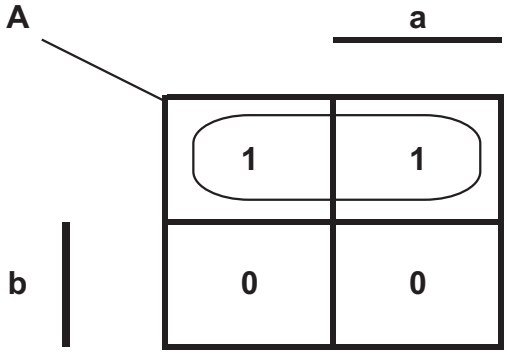
_ reprenons notre exemple

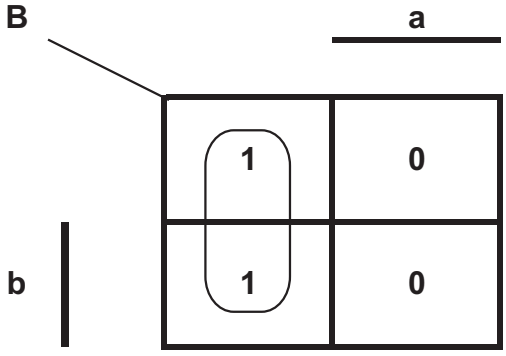


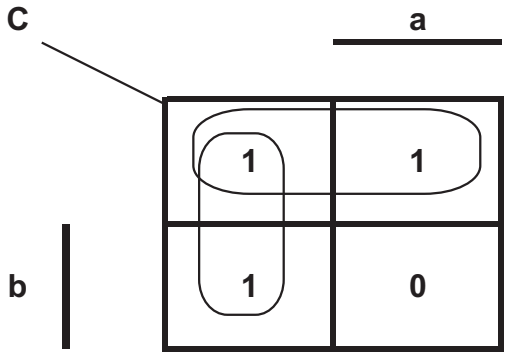
Exercice n° 1 et n° 2

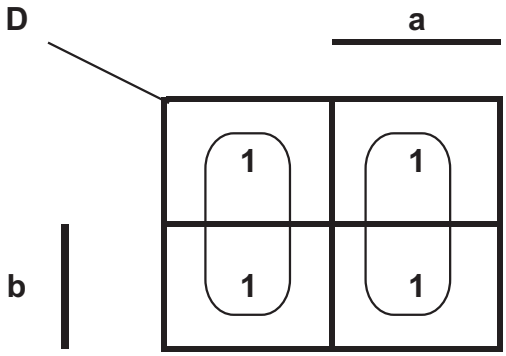
exercice n° 1 :

_ lire les tableaux suivants en donnant pour chacun d'eux les valeurs des fonctions logiques simplifiées.









_ pour D : trouver un autre groupement ? donner son équation . Conclusion ?

la solution de cet exercice à la page 19

---

vous venez de la page 19

exercice n° 2 :

_ reprendre les expressions suivantes du chapitre précédent et simplifier-les par Karnaugh

$R = a + a \cdot b$

$S = a + \overline{a} \cdot b$

$T = a \cdot (a + b)$

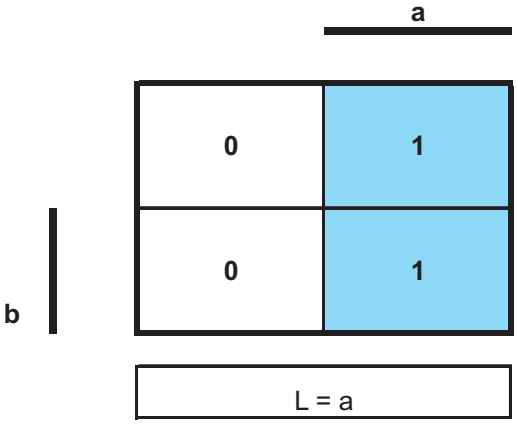
_ comparer avec ce que l'on avait obtenu ..

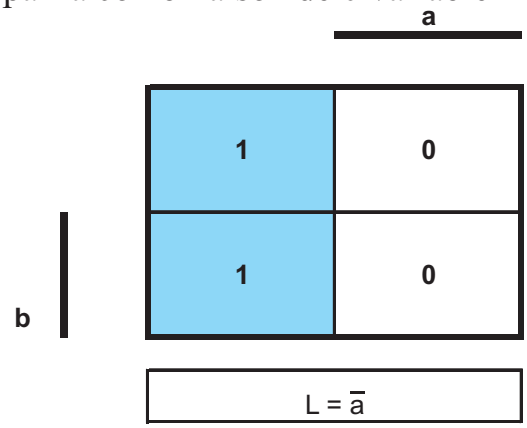
la solution de cet exercice à la page 19

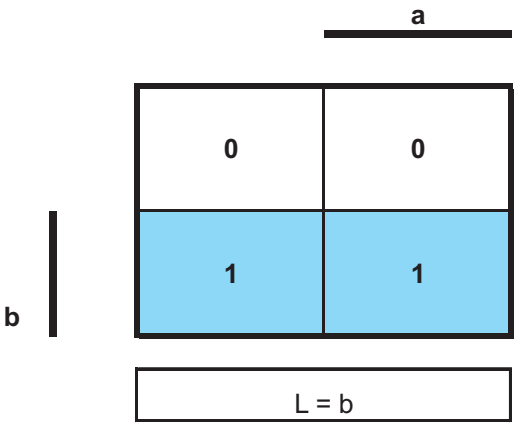
vous venez de la page 19

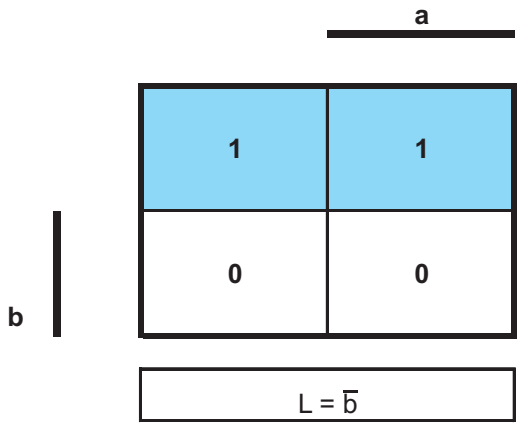
remarque : _ Dans un tableau de Karnaugh à 2 variables : Il y a 2^2 soit 4 cases

- 1 case est définie par la combinaison de 2 variables
- 2 cases sont définies par la combinaison de 1 variable
- 4 cases sont définies par la combinaison de 0 variable









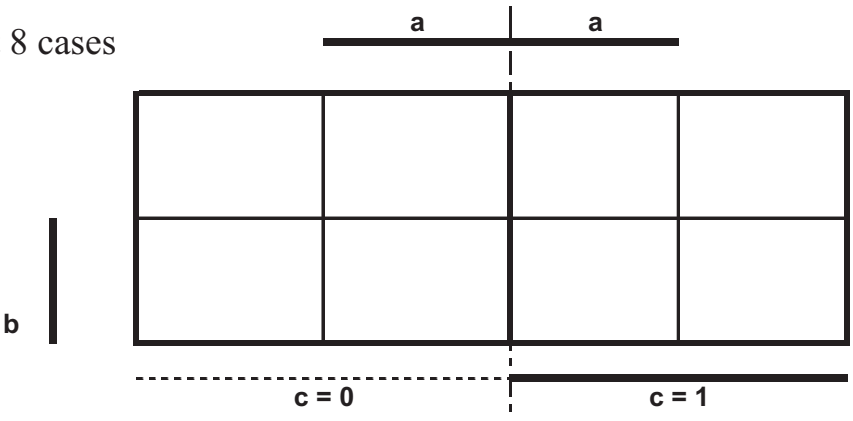
_ Pour chaque variable, le choix de 0 ou de 1 représente la moitié des cas

2) TABLEAU DE KARNAUGH A 3 VARIABLES

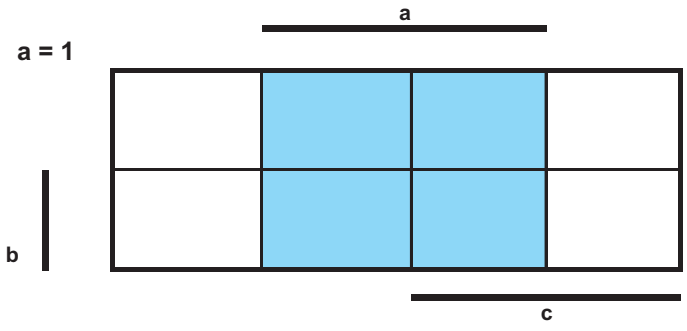
_ Le tableau comprendra 2^3 cases soit 8 cases

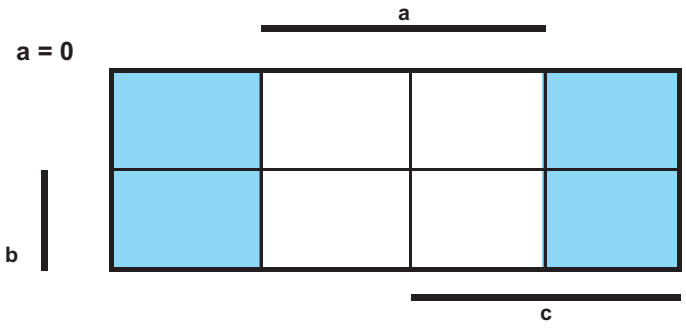
_ le tableau à 2 variables est doublé :

- une fois pour c = 0
- une fois pour c = 1

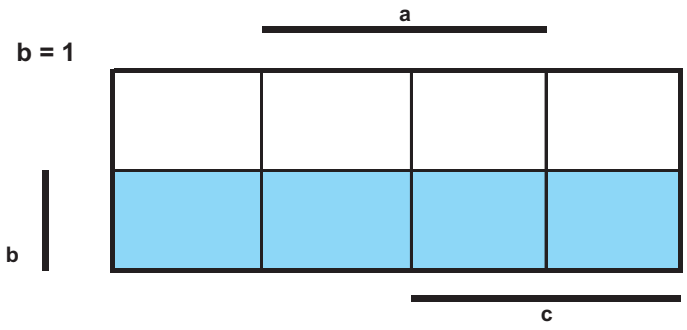


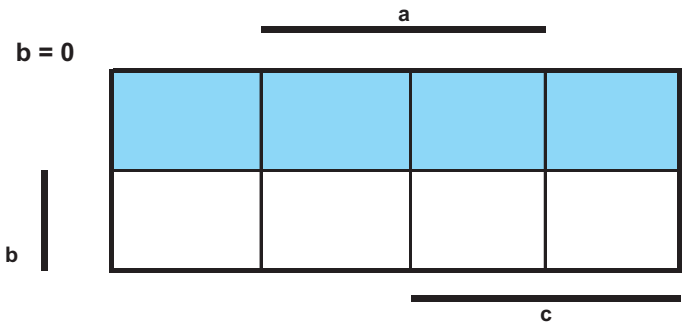
_ Là encore, 0 ou 1 pour une variable correspond à la moitié des cas :

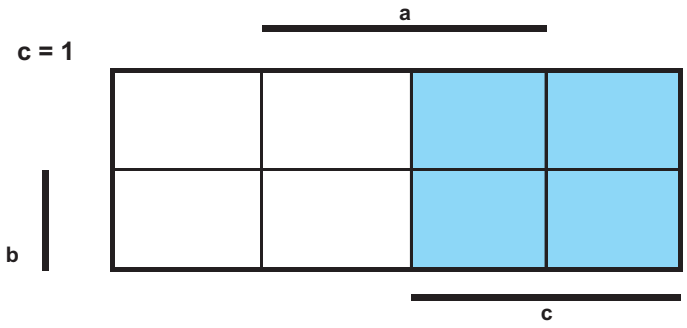


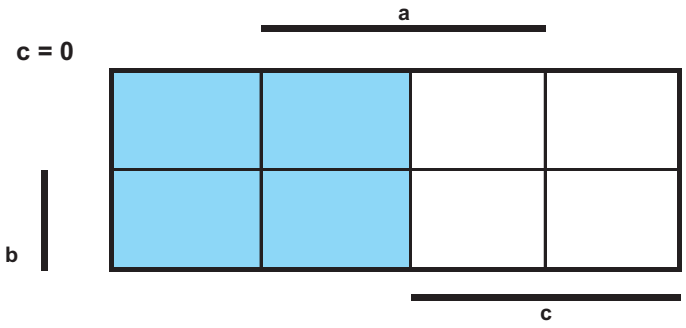


ATTENTION _ les deux parties de la région $\bar{a} = 1$ doivent se considérer comme jointives









remarque : _ Dans un tableau à 3 variables: il y a 2^3 cases soit 8 cases

- 1 case est définie par la combinaison de 3 variables
- 2 cases sont définies par la combinaison de 2 variables
- 4 cases sont définies par la combinaison de 1 variable
- 8 cases sont définies par la combinaison de 0 variable

exercice n° 3 : _ numéroter les 8 lignes de la table de vérité c, b, a et reporter ces numéros dans les 8 cases correspondantes du tableau.

la solution de cet exercice à la page 20

vous venez de la page 20

exercice n° 4 : _ représenter par des tableaux les équations suivantes :

A = a . $\overline{b}$. c
B = $\overline{a}$. $\overline{b}$. $\overline{c}$
C = $\overline{a}$. b . $\overline{c}$
D = a . b
E = $\overline{a}$. b + $\overline{a}$. $\overline{b}$. c
F = $\overline{a}$ + $\overline{b}$. $\overline{c}$

la solution de cet exercice à la page 20

---

vous venez de la page 20

exercice n° 5 : _ lire l'équation représentée dans les tableaux suivants :

G

b \ a	0	0	1	1
0	0	0	1	1

c

K

b \ a	1	0	0	1
0	0	0	0	0

c

H

b \ a	0	0	1	0
0	0	0	1	0

c

L

b \ a	1	1	0	0
0	0	0	1	0

c

I

b \ a	0	0	1	1
0	0	0	0	0

c

M

b \ a	1	1	0	0
0	1	1	0	0

c

J

b \ a,c	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0

N

b \ a,c	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0

la solution de cet exercice à la page 21

---

vous venez de la page 22

exercice n° 6 : _ représenter par des tableaux de Karnaugh les tables de vérité :

a	b	c	G	H	I	J	K
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0

_on peut :

- reporter ligne par ligne
- reporter les cas 1 compléter par des 0
- reporter les cas 0 d'abord s'ils sont moins nombreux et compléter par des 1.

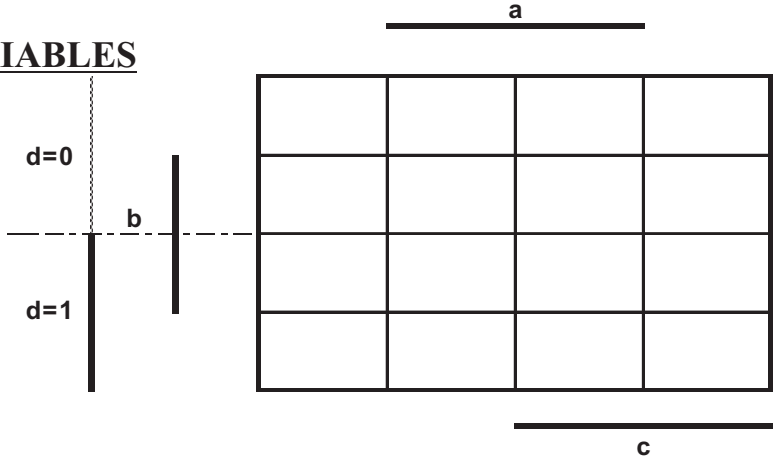
la solution de cet exercice à la page 23

---

vous venez de la page 24

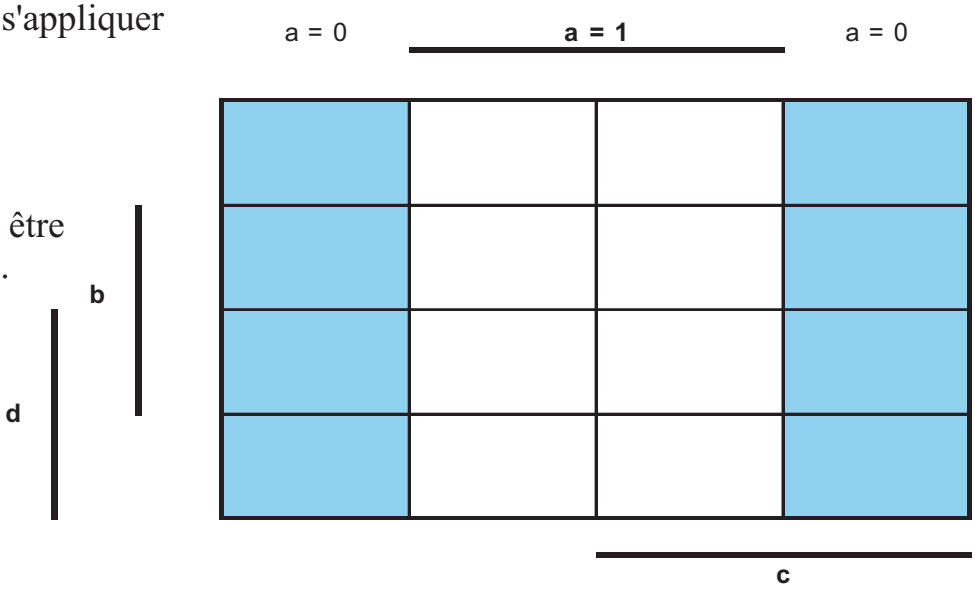
3) TABLEAU DE KARNAUGH A 4 VARIABLES

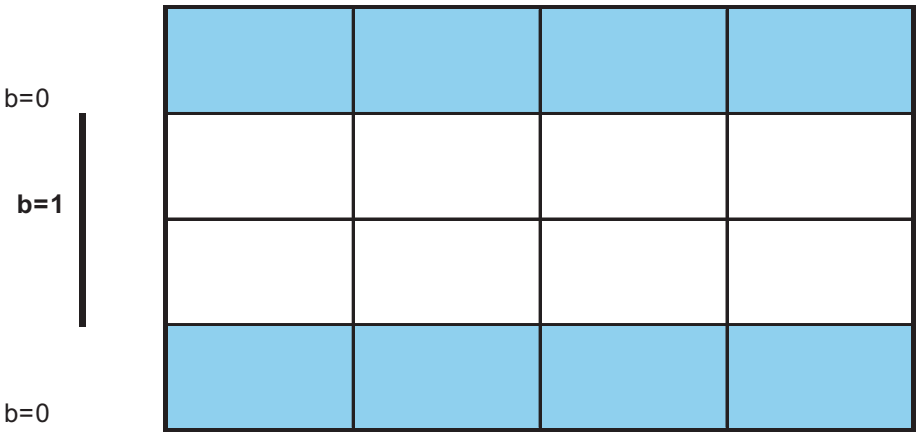
_ la aussi, on doublele nombre de cas par rapport à celui à 3 variables.



_ les mêmes remarques pour les tableaux précédents peuvent s'appliquer au tableau à 4 variables.

_ les parties hachurées doivent être considérées comme jointives.





remarque : _ Dans un tableau à 4 variables: il y a 2^4 cases soit 16 cases

- 1 case est définie par la combinaison de 4 variables
- 2 cases sont définies par la combinaison de 3 variables
- 4 cases sont définies par la combinaison de 2 variables
- 8 cases sont définies par la combinaison de 1 variable
- 16 cases sont définies par la combinaison de 0 variable

Important : _ les appellations et l'ordre a, b, c, sont arbitraires. Seule compte la disposition des différentes variables.

Exercice n° 7

Voici maintenant un exercice

exercice n° 7 : _ rechercher les groupements de 2, 4, 8 cases, les plus larges possibles.

_ écrire l'équation correspondant à chacun des tableaux :

A

d \ b \ a c	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	1	1

B

x \ y \ w z	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	0	0
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

C

d \ c \ a b	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	1	1	0

D

m \ s \ p h	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

E

d \ c \ b a	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	0	0
11	0	1	1	1
10	0	0	0	1

F

d \ b \ a c	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	1	1	1
11	0	1	0	0
10	1	0	0	1

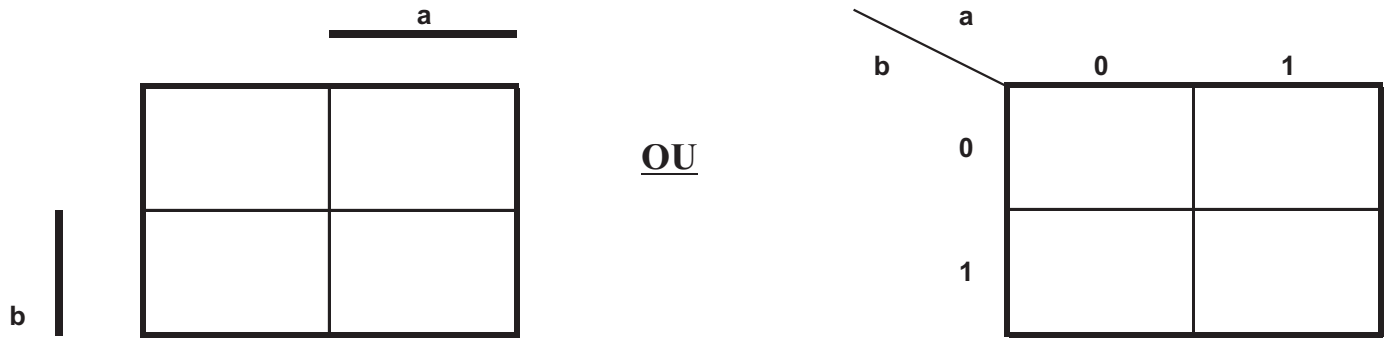
la solution de cet exercice à la page 24

Vous venez de la page 26

5) AUTRE REPERAGE DES CASES

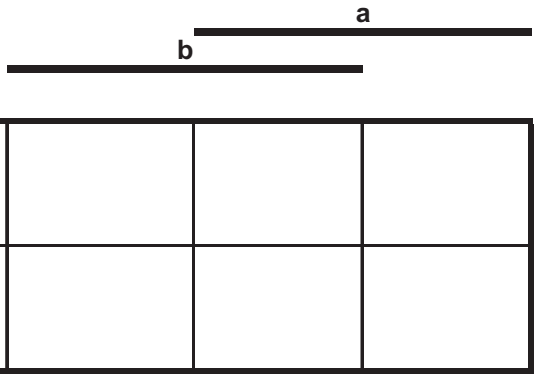
_ avec deux variables nous avions deux possibilités

a	b
0	0
0	1
1	0
1	1



_ il en est de même avec 3 ou 4 variables :

a	b	c		
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		



Attention :

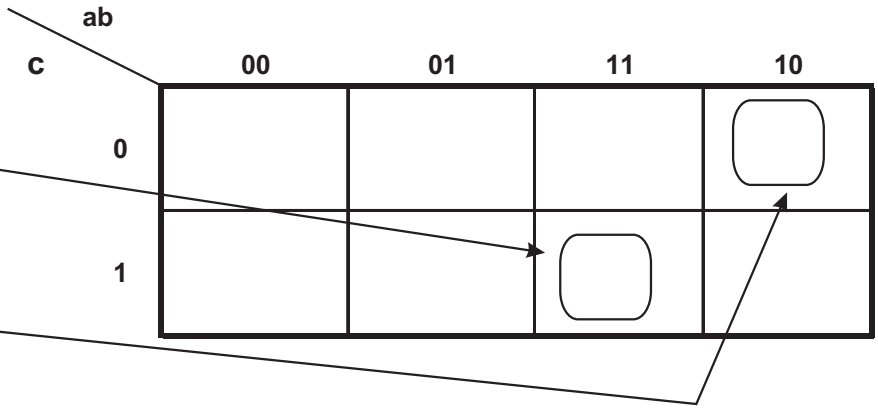
_ à l'ordre 00, 01, 11, 10

_ un seul chiffre doit changer d'une colonne à la voisine

* 01 dans la colonne signifie :
  a = 0
  b = 1 soit $\overline{a}$.b

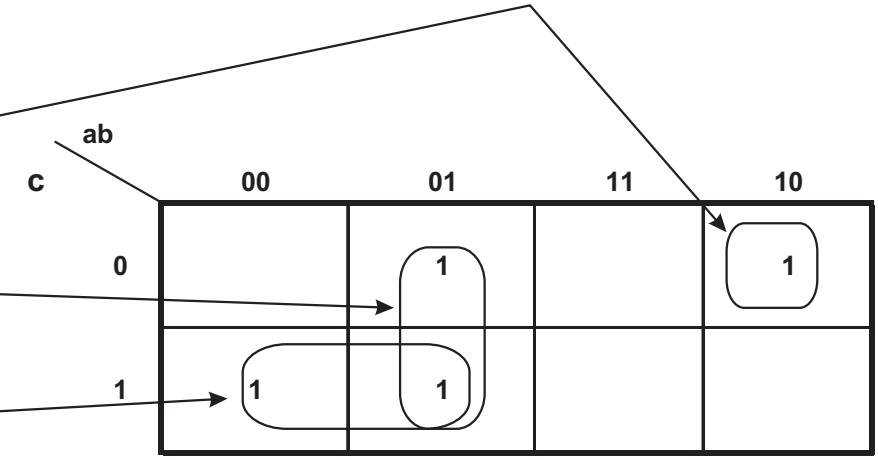
* la 8ème ligne de la table se lit :
  a b c
  1 1 1

* la 5ème ligne de la table se lit :
  a b c
  1 0 0



_ Inversement, lecture du tableau :

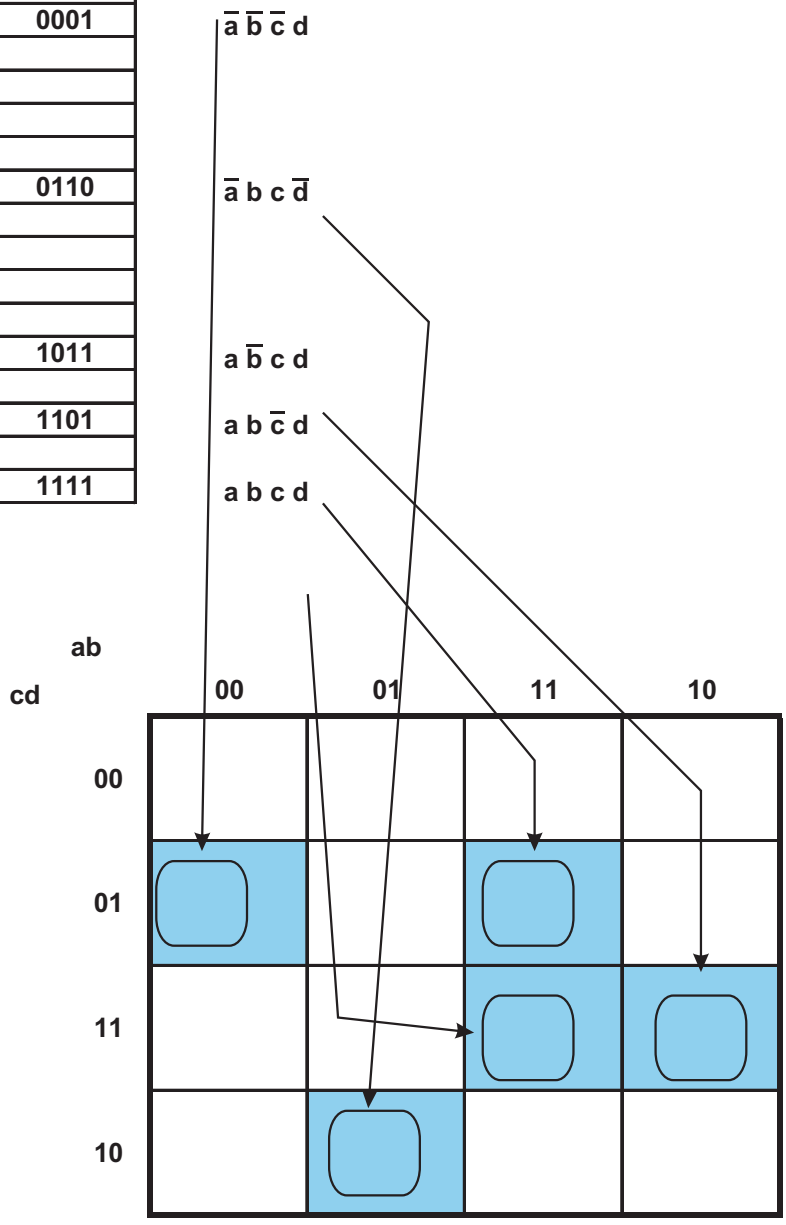
a	b	c	
1	0	0	a $\overline{b}$ $\overline{c}$
0	1	0	
0	1	1	$\overline{a}$ b (c indifférent)
0	0	1	
0	1	1	$\overline{a}$ c (b indifférent)



Autres repérage des cases

_ ce repérage est particulièrement commode pour les tableaux à 4 variables (trés fréquent).

a	b	c	d		S
0	0	0	0		
0	0	0	1		0001
0	0	1	0		
0	0	1	1		
0	1	0	0		
0	1	0	1		
0	1	1	0		0110
0	1	1	1		
1	0	0	0		
1	0	0	1		
1	0	1	0		
1	0	1	1		1011
1	1	0	0		
1	1	0	1		1101
1	1	1	0		
1	1	1	1		1111



_ Le mot désignant une ligne se lit en deux syllabes de deux chiffres chacune, en prenant bien soin de respecter rigoureusement l'ordre des variables.

<u>En résumé, un tableau de n variables</u>

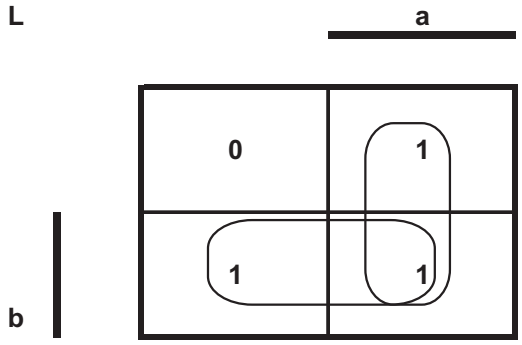
- comporte 2^n cases
- 1 case est définie par la combinaison de n variables
- 2 cases sont définies par la combinaison de (n-1) variables
- 4 cases sont définies par la combinaison de (n-2) variables

- 2^{n-1} cases sont définies par la combinaison de 1 variables
- 2^n cases sont définies par la combinaison de 0 variable

II THEOREME DE DE MORGAN

1) ENONCE

_ reprenons le tableau de Karnaugh suivant :



L = a + b

_ si au lieu de grouper les "1" on avait groupé les "0" on aurait obtenu $\overline{L}$ (au lieu de L).
Il suffit alors de prendre le complément de $\overline{L}$ pour avoir L.

_ dans notre exemple ci-dessous

$\overline{L} = \overline{a} \cdot \overline{b}$ (en groupant les "0")

soit $L = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$

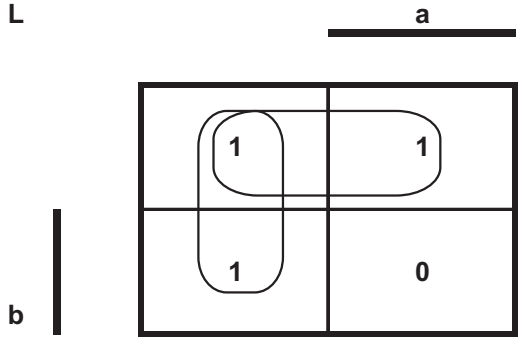
_ or on avait L = a + b --> $a + b = \overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}$

que l'on écrit en complémentant chaque menbre : $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

" le **complément d'une somme** de variables est égal au **produit des compléments** des variables "

$$\overline{a + b + \ldots + x} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \ldots \cdot \overline{x}$$

_ prenons un autre exemple :



$L = \overline{a} + \overline{b}$

en groupant les "0" on aurait eu $\overline{L} = a \cdot b$

soit $L = \overline{a \cdot b}$

d'où --> $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$

" le **complément d'un produit** de variables est égal au **à la somme des compléments** des variables "

$$\overline{a \cdot b \cdot \ldots \cdot x} = \overline{a} + \overline{b} + \ldots + \overline{x}$$

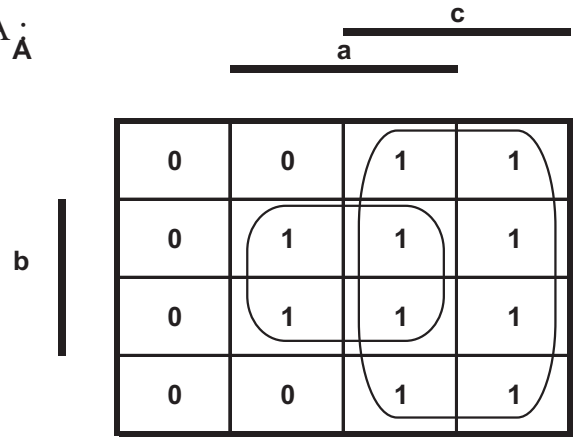
2) UTILISATION DE DE MORGAN

_ on utilise De Morgan quand il est plus facile de grouper les "0" que les "1".

_ or avec les relais, on ne sait pas cabler le complément d'une somme ou d'un produit. De Morgan permet de faire le cablage.

_ mais attention, il est souvent difficile, voire impossible de vérifier que les deux expressions sont identiques, si ce n'est par la simulation.

_ prenons comme exemple le tableau à quatre variables A ;



_ en groupant les "1" on avait $A = a.b + c$

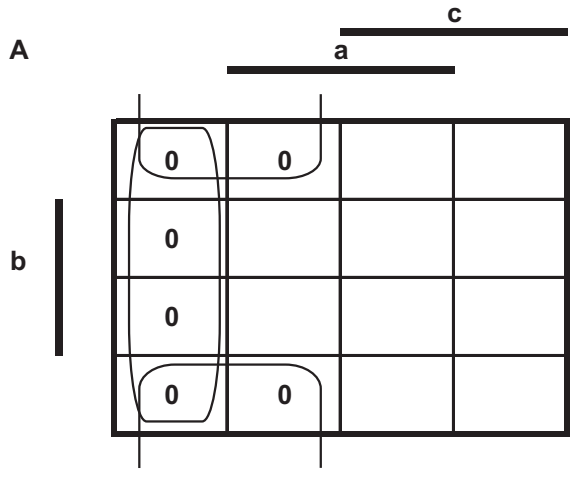
_ en groupant les "0"

on a $\overline{A} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}$

soit $A = \overline{\overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}} = \overline{\overline{a} \cdot \overline{c}} \cdot \overline{\overline{b} \cdot \overline{c}}$

on aura donc $a \cdot b + c = (a + c) \cdot (b + c)$

_ ce qui ne semble pas évident à première vue



RESUME

DE MORGAN

--> $\overline{a + b + c} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

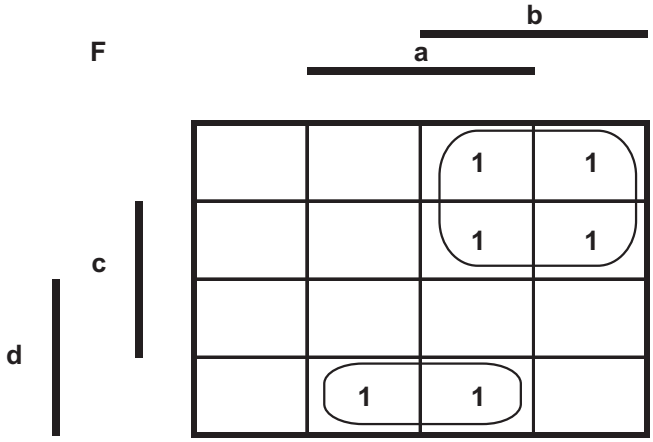
--> $\overline{a \cdot b \cdot c} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

GENERALISATION

$\overline{a \cdot (b + c) + b \cdot \overline{c} \cdot \overline{a}} = (\overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{c}) \cdot (\overline{b} + c + a)$

F = somme de produit

$(b \cdot \overline{d} + a \cdot \overline{c} \cdot d)$

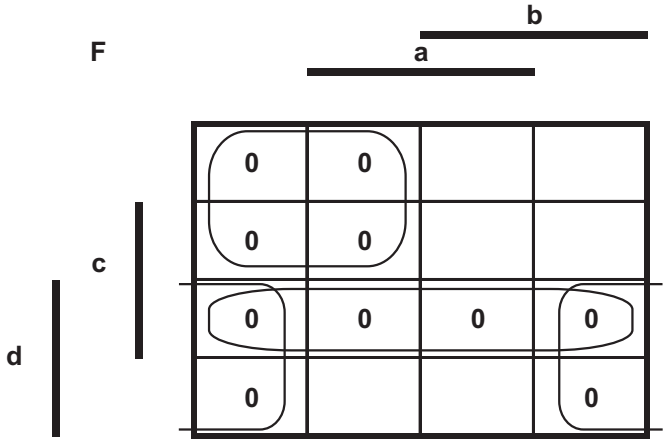


$\overline{F}$ = somme de produit

$(\overline{b} \cdot \overline{d} + c \cdot d + \overline{a} \cdot d)$

F = $(b + d) \cdot (\overline{c} + \overline{d}) \cdot (a + \overline{d})$

produit de somme



III EXPLOITATION DES CAS INDIFFERENTS

Cas indifférents ou peu importants

Par exemple, soit un système à trois boutons de commande a, b, c la réalisation est telle qu'il soit impossible de ma noeuvrer a et b en même temps à l'état 1.

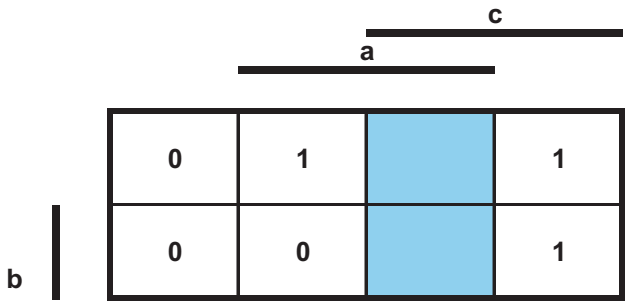
a	b	c	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	
1	1	1	

) ---> cas exclus

_ Cela exclut deux cas : il n'y a pas à rechercher ce que serait la valeur de S pour ces cas.

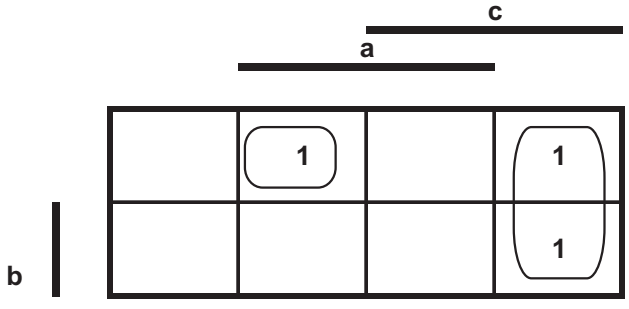
_ peu importe que ce soit 1 ou 0 puisque cette éventualité ne peut pas se produire.

_ Un signe distinctif Ø ou autre, est utilisé



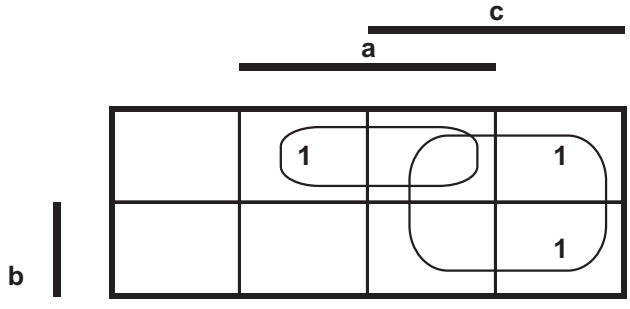
_ Ces cas qui ne sont pas impérativement 0 ou 1 peuvent s'utiliser à volonté avec les 0 ou les 1 voisins pour faire des regroupements plus larges.

les 1 seuls



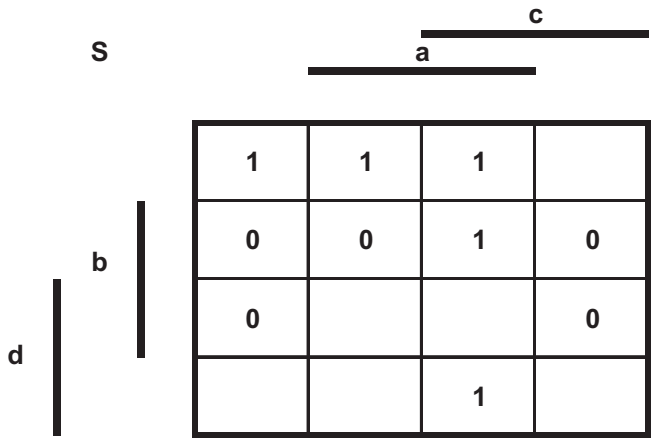
$\overline{a} \cdot c + a \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$

avec les Ø



$c + a \cdot \overline{b}$

exercice n° 9 : _ comparer l'équation en ne regroupant que les 1 à celle obtenue en utilisant les cas indifférents.



la solution de cet exercice à la page 27

---

vous venez de la page 27

exercice n° 10 : _ refaire le même exercice en groupant les "0"

la solution de cet exercice à la page 27

vous venez de la page 3

correction exercice n° 1 :

A = 1 quand b = 0 --> $A = \overline{b}$
B = 1 quand a = 0 --> $B = \overline{a}$
C = 1 quand a = 0 ou b = 0 --> $C = \overline{a} + \overline{b}$

D = 1 quand b = 0 ou b = 1 --> $D = b + \overline{b} = 1$

OU quand a = 0 ou a = 1 --> $D = a + \overline{a} = 1$

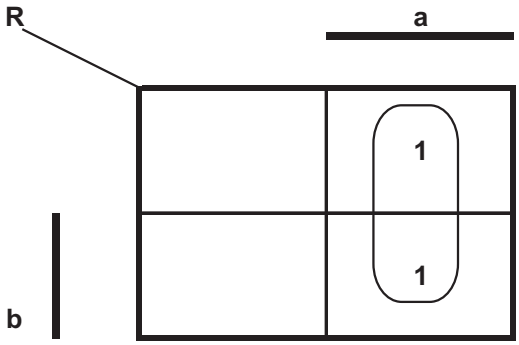
D est indépendant a et b on aurait pu faire un groupement de 4

retourner à la page 3 pour un un deuxième exercice

---

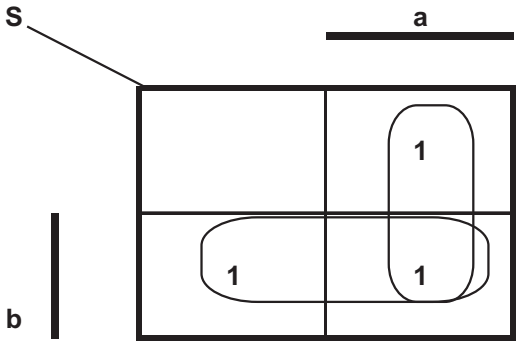
vous venez de la page 3

correction exercice n° 2 : R = a + a . b



R = a

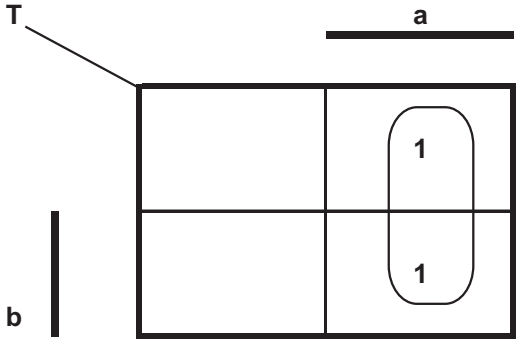
S = a + $\overline{a}$. b



S = a + b

T = a . (a + b)

T = a

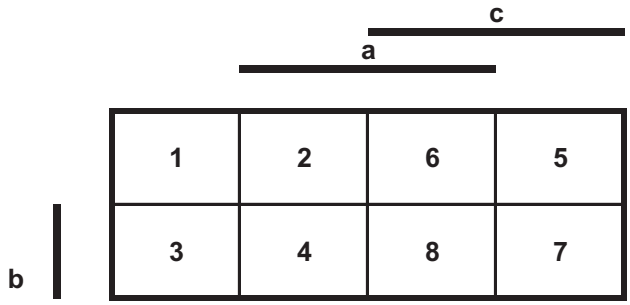


pour avancer dans le programme, aller à la page 4

vous venez de la page 5

correction exercice n° 3 :

c	b	a		
0	0	0		1
0	0	1		2
0	1	0		3
0	1	1		4
1	0	0		5
1	0	1		6
1	1	0		7
1	1	1		8



aller à la page 6

---

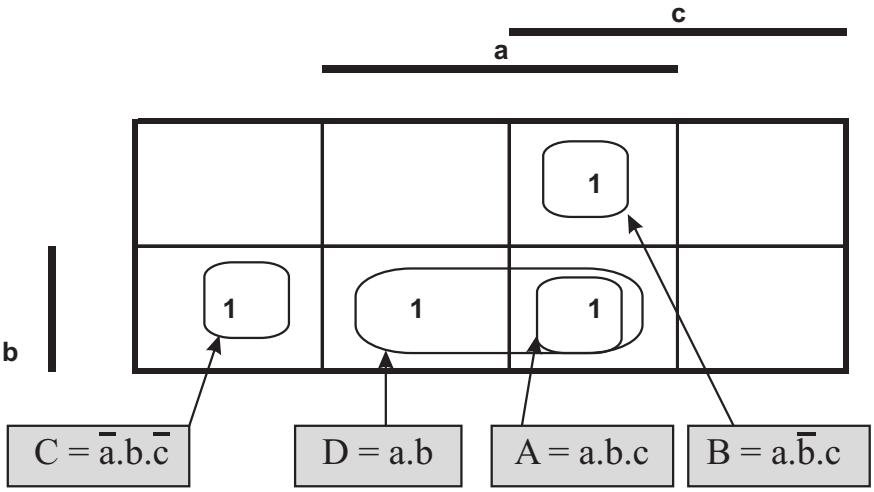
vous venez de la page 6

correction exercice n° 4 :

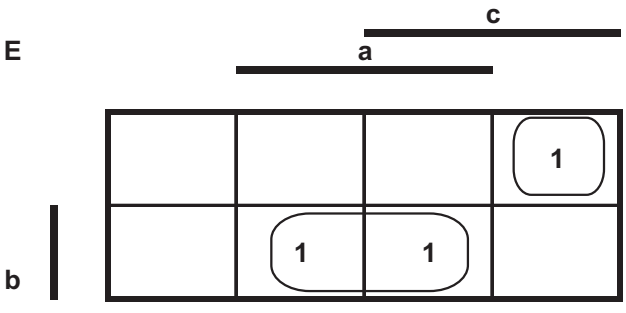
remarque:

D = a . b = a . b (c + $\overline{c}$)
= a.b.c + a.b.$\overline{c}$

1 case dans c
1 case dans $\overline{c}$

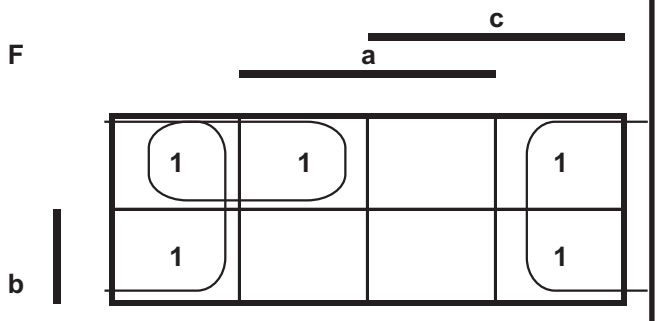


E



E = a.b + $\overline{a}$.$\overline{b}$.c

F



F = $\overline{a}$ + $\overline{b}$.$\overline{c}$

retourner à la page 6 pour l'exercice n° 5

vous venez de la page 6

correction exercice n° 5 :

_ l'écriture est plus simple quand on peut obtenir des regroupements de 2 ou 4 cases convenables.

_ tout le domaine c = 1 **G = c**

la boucle à cheval sur a et $\overline{a}$, et sur b et $\overline{b}$ indique l'idifférence vis à vis de ces variables.

G

b \ a c	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1

_ dans c = 1 et dans a = 1 sur b et $\overline{b}$: b indifférent

H = a . c

H

b \ a c	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	0	1	0

_ dans b = 0 et dans c = 1 sur a et $\overline{a}$: indifférent

I = $\overline{b}$. c

I

b \ a c	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	0	0	0

_ dans a = 1 , dans b = 1 et dans c = 0 sur a et $\overline{a}$: indifférent

J = a . b . $\overline{c}$

J

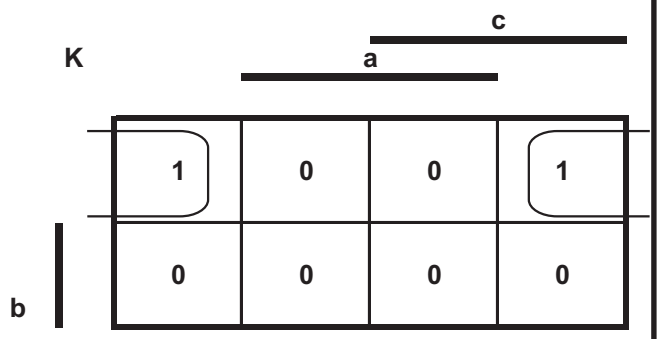
b \ a c	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0

Solutions de l'exercice n° 5

suite correction exercice n° 5 :

_ dans b = 0 et dans a = 0
c indifférent

K = $\overline{a}$. $\overline{b}$



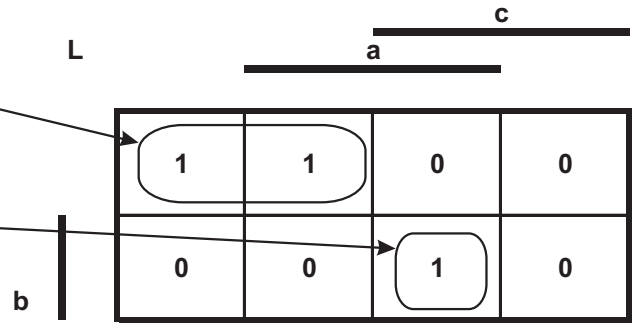
_ dans b = 0 et dans c = 0
a : indifférent

$\overline{b}$. $\overline{c}$

_ dans a = 1 et dans b = 1 et dans c = 0

a . b . c

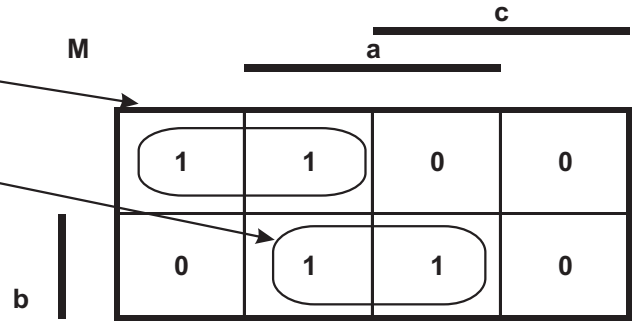
L = $\overline{b}$. $\overline{c}$ + a . b . c



$\overline{b}$. $\overline{c}$

a . b

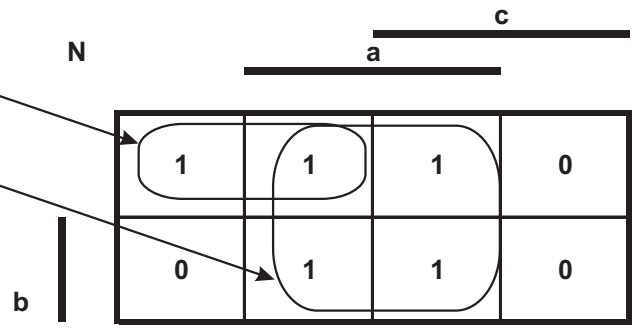
M = a . b + $\overline{b}$. $\overline{c}$



$\overline{b}$. $\overline{c}$

a

N = a + $\overline{b}$. $\overline{c}$



_ l'utilisation du tableau, en recherchant
les boucles les plus larges de 2 ou 4 cases,
donne immédiatement l'écriture la plus simple

retourner à la page 6 pour l'exercice n° 7

vous venez de la page 7

correction exercice n° 6 :

$G = \overline{b} \cdot \overline{c} + b \cdot c$

G

c \ a b	00	01	11	10
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1

$H = \overline{a} \cdot b \cdot \overline{c} + a \cdot b \cdot c$

$H = b \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c} + a \cdot c)$

(pas de regroupement)

H

c \ a b	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0

$I = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \overline{b} \cdot \overline{c}$

ou bien

$I = \overline{a} \cdot \overline{b} + a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{c}$

(autre regroupement)

I

c \ a b	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	1	0	1	0

$J = \overline{b} \cdot c$

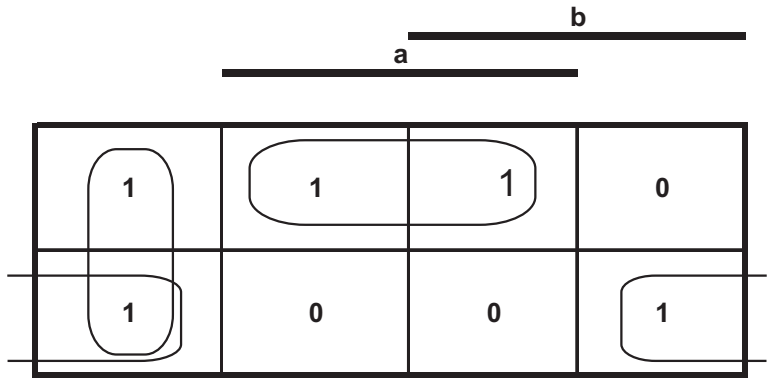
J

c \ a b	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	0	0

suite correction exercice n° 6 :

K = $\overline{a}.\overline{b} + a.\overline{c} + \overline{a}.c$

K



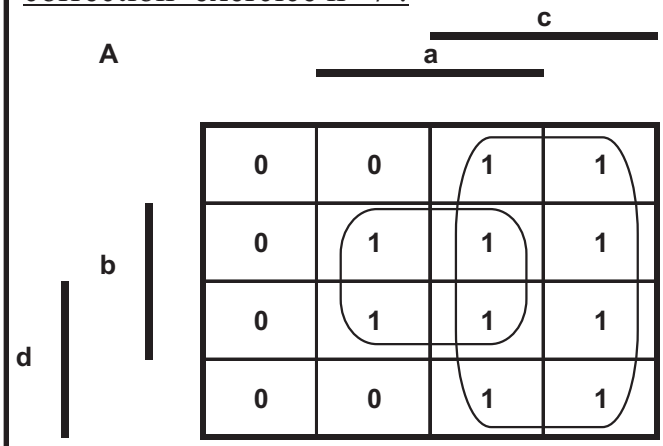
retourner à la page 7

---

vous venez de la page 9

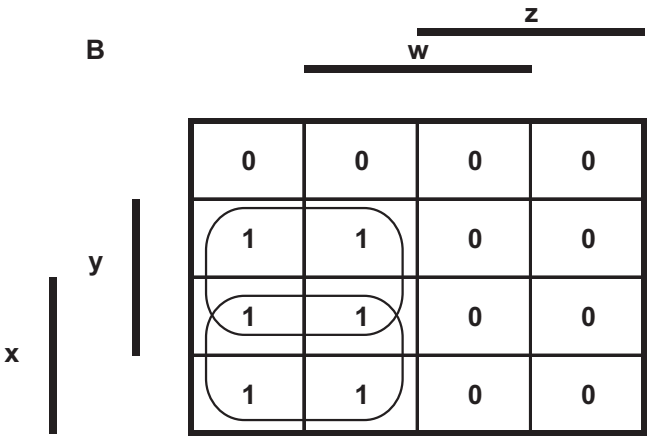
correction exercice n° 7 :

A



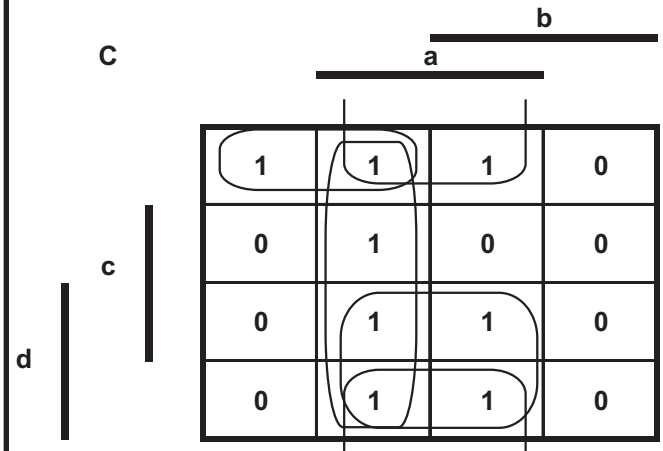
$A = c + a \cdot b$

B



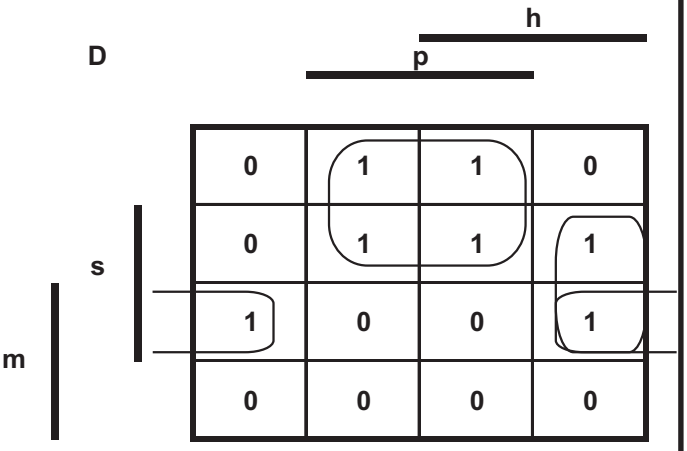
$B = \overline{z} \cdot y + \overline{z} \cdot x$
$B = \overline{z} \cdot (x + y)$

C



$C = a.\overline{b} + a.d + a.\overline{c} + \overline{b}.c.\overline{d}$
$C = a \cdot (\overline{b} + \overline{c} + d) + \overline{b}.c.\overline{d}$

D



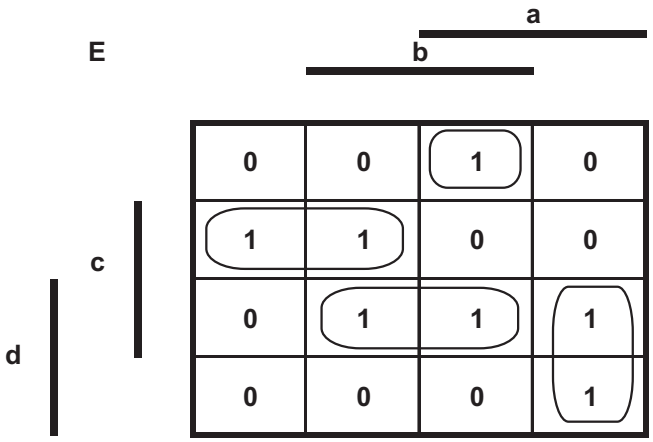
$D = p.\overline{m} + \overline{p}.h.s + \overline{p}.m.s$

ou bien

$D = p.\overline{m} + h.s.\overline{m} + \overline{p}.m.s$

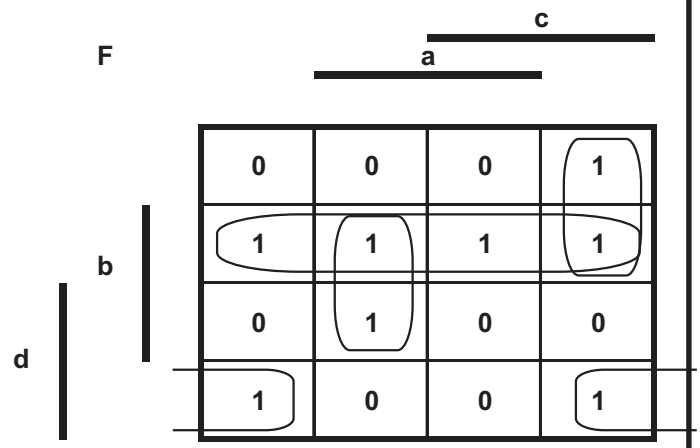
suite correction exercice n° 7 :

E



$E = \overline{a}.c.\overline{d} + b.c.d + a.\overline{b}.d + a.b.\overline{c}.\overline{d}$

F



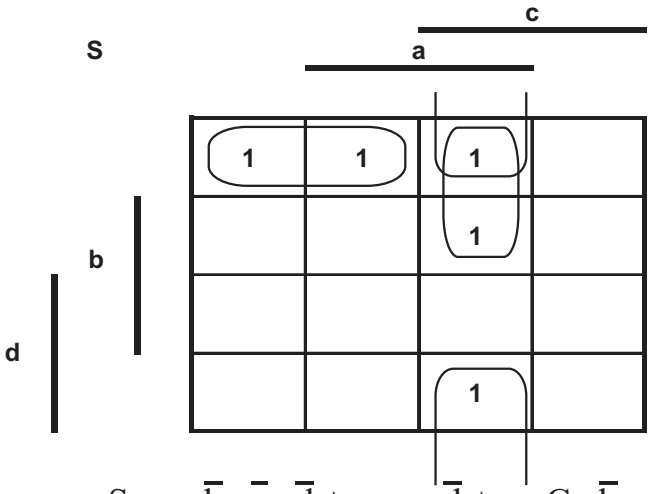
$F = b.\overline{d} + a.b.\overline{c} + \overline{a}.c.\overline{d} + \overline{a}.\overline{b}.d$

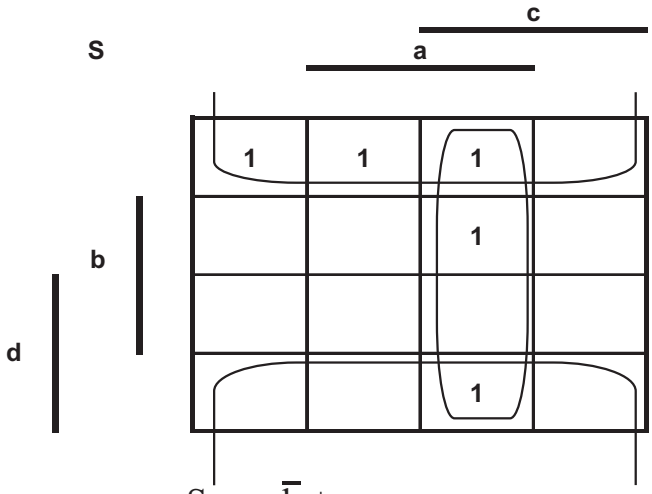
ou bien $F = b.\overline{d} + a.b.\overline{c} + \overline{a}.\overline{b}.c + \overline{a}.\overline{b}.d$

aller à la page 10

Solutions des exercices n° 9 et n° 10

correction exercice n° 9 : **les 1 seuls** **avec les Ø**





$S = \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot c \cdot \overline{d} + a \cdot C \cdot \overline{b}$
$\overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} + a \cdot b \cdot (\overline{c} + \overline{d})$

$S = \overline{b} + a \cdot c$

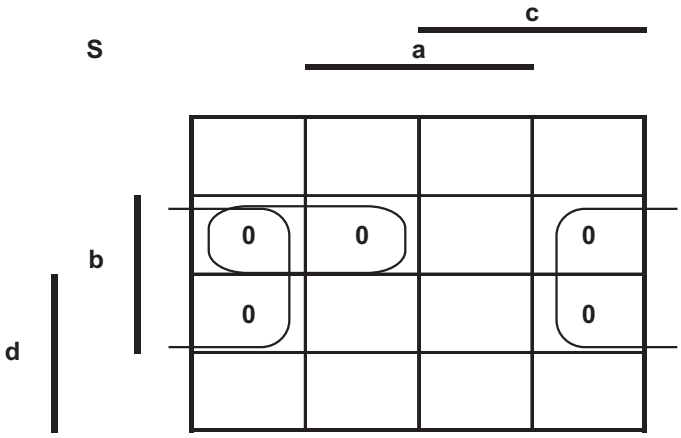
_ les cases Ø non employés sont assimilées à des 0

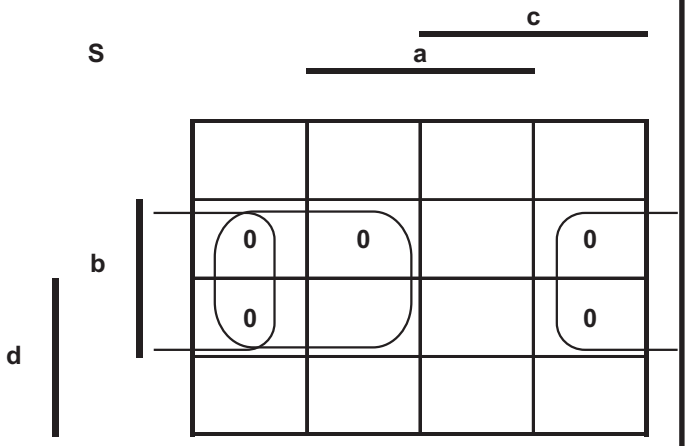
aller à la page 18

---

vous venez de la page 18

correction exercice n° 10 : **les 0 seuls** **avec les Ø**





$\overline{S} = \overline{a} \cdot c + \overline{b} \cdot c \cdot \overline{d}$
$(a + c) \cdot (b + \overline{c} + d)$

$\overline{S} = \overline{a} \cdot b + \overline{c} \cdot B$
$c \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \overline{c} + a \cdot b$

_ l'utilisation des Ø rend impossible la vérification des équations obtenues